MATEMÁTICA - Grupos I e J - Gabarito

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Seiscentos estudantes de uma escola foram entrevistados sobre suas preferências quanto aos esportes vôlei e futebol.

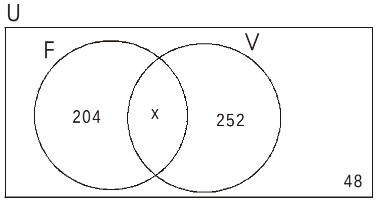
O resultado foi o seguinte: 204 estudantes gostam somente de futebol, 252 gostam somente de vôlei e 48 disseram que não gostam de nenhum dos dois esportes.

a) Determine o número de estudantes entrevistados que gostam dos dois esportes.
b) Um dos estudantes entrevistados é escolhido, ao acaso. Qual a probabilidade de que ele goste de vôlei?

Cálculos e respostas:

Consideremos F = conjunto dos estudantes entrevistados que gostam de futebol
V = conjunto dos estudantes entrevistados que gostam de vôlei
U = conjunto dos estudantes entrevistados.

Podemos, então, construir o seguinte diagrama:



a) Seja $x = n(F \cap V)$
Temos que $204 + x + 252 + 48 = 600 \iff x = 600 - 504 = 96$.

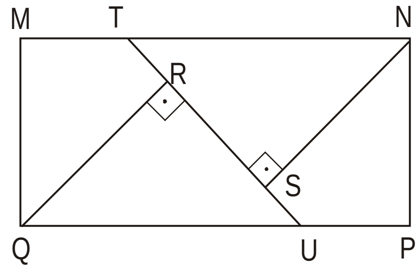
Logo, 96 estudantes entrevistados gostam dos dois esportes.

b) $P = \dfrac{252 + 96}{600} = \dfrac{348}{600} = \dfrac{58}{100} = 58\%$

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

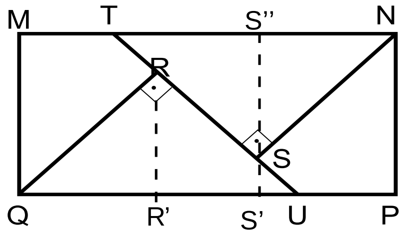
Avaliador | Revisor

Considere a figura a seguir.



Os triângulos NST e QRU são triângulos retângulos isósceles e congruentes. Se a medida do segmento NT é igual a 2 cm e se a medida do segmento RS é igual a 1 cm, determine a área do retângulo MNPQ.

Cálculos e respostas:



Como os triângulos NST e QRU são triângulos isósceles e congruentes, temos:

$\overline{NS} = \overline{ST} = \overline{QR} = \overline{RU}$.

E,

$\overline{NS}^2 + \overline{ST}^2 = \overline{NT}^2 \Leftrightarrow 2\overline{NS}^2 = 4 \Leftrightarrow \overline{NS}^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{NS} = \sqrt{2}$

Logo, $\overline{NS} = \overline{ST} = \overline{RU} = \overline{QR} = \sqrt{2}$.

Também, $\overline{QR'} = \overline{R'U} = \overline{S''T} = \overline{NS''} = 1$.

Observamos que $\overline{RR'} = \overline{SS''} = 1$.

Cálculo da base do retângulo $\left(\overline{QP}\right)$:

$\overline{SU} = \overline{RU} - \overline{RS} = \sqrt{2} - 1$.

$\overline{SS'}^2 + \overline{S'U}^2 = \overline{SU}^2 \Leftrightarrow 2\overline{S'U}^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \Leftrightarrow \overline{S'U} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, $\overline{UP} = \overline{S'P} - \overline{S'U} = 1 - \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

E,

$\overline{QP} = \overline{QU} + \overline{UP} = 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cálculo da altura do retângulo $\left(\overline{NP}\right)$:

$\overline{NP} = \overline{SS'} + \overline{SS''} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Área do retângulo:

$\overline{QP} \times \overline{NP} = \left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$ (u.a.).

MATEMÁTICA - Grupos I e J - Gabarito

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\ell og_{10} |1-x| > \ell og_{0,1} 7$$

Cálculos e respostas:

$$\ell og_{10}|1-x| > \ell og_{0,1}7 \Leftrightarrow \ell og_{10}|1-x| > \frac{\ell og_{10}7}{\ell og_{10}0,1}$$

$$\Leftrightarrow \ell og_{10}|1-x| > -\ell og_{10}7 \Leftrightarrow \ell og_{10}|1-x| > \ell og_{10}\frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow |1-x| > \frac{1}{7}$$

Assim,

$$1-x > \frac{1}{7} \quad ou \quad 1-x < -\frac{1}{7}$$

E,

$$x < \frac{6}{7} \quad ou \quad x > \frac{8}{7}.$$

Conjunto - solução:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{6}{7} \quad ou \quad x > \frac{8}{7}\right\} = \left(-\infty, \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{8}{7}, +\infty\right)$$

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | Revisor

Nas figuras I e II estão representados dois cones circulares retos.

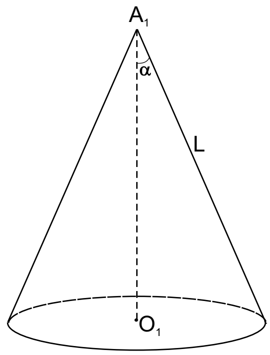


Figura I

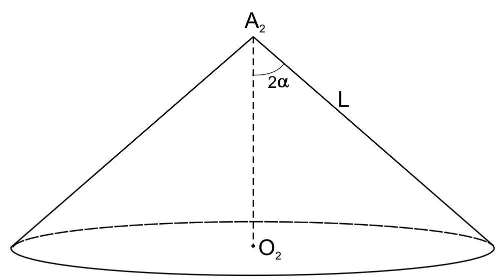


Figura II

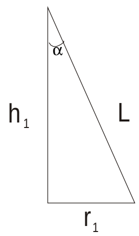
O cone da figura I tem vértice A_1, base centrada em O_1, comprimento da geratriz igual a L e sua altura (O_1A_1) forma com a geratriz um ângulo α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$). O cone da figura II tem vértice A_2, base centrada em O_2, comprimento da geratriz também igual a L e sua altura (O_2A_2) forma com sua geratriz um ângulo 2α.

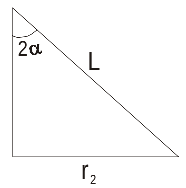
Considere r_1 o raio da base do cone da figura I e V_1 o seu volume; r_2 o raio da base do cone da figura II e V_2 o seu volume.

a) Determine o valor de α de modo que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Determine, em termos apenas de cos α, a expressão de $\frac{V_1}{V_2}$.

Cálculos e respostas:





$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a) $\frac{r_1}{L} = \operatorname{sen}\alpha$ e $\frac{r_2}{L} = \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$$\frac{r_2}{L} = 2\frac{r_1}{L}\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\pi}{6}\text{ rad} \quad \text{ou} \quad 30^{o}$$

Cálculos e respostas:

b) $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{\pi}{3}\left(L\ \mathrm{sen}\,\alpha\right)^2 L\cos\alpha = \frac{\pi}{3}L^3\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{\pi}{3}\left(L\ \mathrm{sen}\,\alpha\right)^2 L\cos 2\alpha$

$= \frac{\pi L^3}{3}\left(2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2\left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\right) = \frac{4\pi L^3}{3}\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)\right)$

Logo,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{3}L^3\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha}{\frac{4\pi L^3}{3}\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)\right)} = \frac{1}{4}\ \frac{1}{\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)}$$

MATEMÁTICA - Grupos I e J - Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Determine as coordenadas dos pontos da reta de equação y = 3x + 4 que distam quatro unidades da origem.

Cálculos e respostas:

Os pontos da reta são da forma P (x, 3x + 4)

$$d(P,0) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(3x+4)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x^2 + 24x + 16 = 16$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 24x = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 10x + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou } x = -\frac{24}{10} = -\frac{12}{5}$$

Os pontos são:

P_1: $x = 0$, $y = 4$ e $P_2: \ x = -\frac{12}{5}, \ \ y = 3\left(-\frac{12}{5}\right) + 4 = -\frac{16}{5}$

ou

$P_1 = (0,4)$ e $P_2 = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right)$.