

Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

1ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Avaliador

Revisor

Para a estréia de um espetáculo foram emitidos 1800 ingressos, dos quais 60% foram vendidos até a véspera do dia de sua realização por um preço unitário de R\$ 45,00.

Considerando que todos os ingressos emitidos serão vendidos, por quanto cada ingresso deverá ser vendido no dia do espetáculo para que a arrecadação total, com a venda dos ingressos, seja de R\$ 88.200,00?

Cálculos e respostas:

Até a véspera do dia da realização do espetáculo foram vendidos $\frac{60}{100} \times 1800 = 1080$ ingressos e o total arrecadado foi de $1080 \times 45 = 48600$.

Para que a arrecadação total seja de R\$ 88.200,00, no último dia a arrecadação deve ser de R\$ 39.600,00.

O valor de venda de cada ingresso no dia do espetáculo deverá ser:

$$\frac{39.600}{1.800 - 1.080} = \frac{39.600}{720} = 55$$

Portanto, cada ingresso deverá ser vendido por R\$ 55,00.

Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

2ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Avaliador

Revisor

Calcule o valor numérico de $\frac{1}{M}$ sendo $M = -2 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2}$, $a = 0,998$ e $b = 1$.

Cálculos e respostas:

Observe que

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 = \frac{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2}$$

Como $a > 0$ e $b > 0$, temos que

$$M = -2 + \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2}} = -2 + \frac{(a^2 + b^2)}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab}$$

Logo,

$$\frac{1}{M} = \frac{ab}{(a-b)^2} = \frac{0,998 \cdot 1}{(0,998-1)^2} = \frac{0,998}{(-0,002)^2} = \frac{998000}{4} = 249500$$

Portanto,

$$\frac{1}{M} = 249500$$

Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

3ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Avaliador

Revisor

Calcule o valor do número natural n que satisfaz a equação

$$\log_{10}(0,1) + \log_{10}(0,1)^2 + \dots + \log_{10}(0,1)^n = -15$$

Cálculos e respostas:

$$\log_{10}(0,1) + \log_{10}(0,1)^2 + \dots + \log_{10}(0,1)^n = -15 \Leftrightarrow \log_{10}(0,1) + 2 \log_{10}(0,1) + \dots + n \log_{10}(0,1) = -15 \Leftrightarrow$$

$$(1 + 2 + \dots + n) \log_{10}(0,1) = -15 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} \times (-1) = -15 \Rightarrow n(n+1) = 30 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0.$$

Logo, $n = 5$ ou $n = -6$.

Como n deve ser um número natural, temos que $n = 5$.

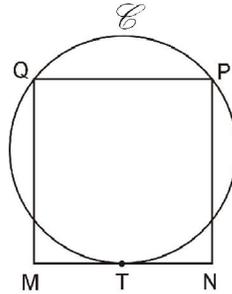
Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

4ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Avaliador

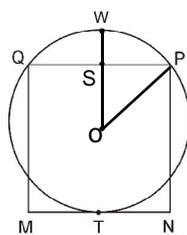
Revisor

Seja MNPQ um quadrado de lado igual a 2 cm. Considere C o círculo que contém os vértices P e Q do quadrado e o ponto médio do lado MN (ponto T). Veja a figura a seguir.



Determine o raio do círculo C.

Cálculos e respostas:



Seja O o centro do círculo. Assim, usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OSP, temos que:

$$(\overline{OS})^2 + (\overline{SP})^2 = (\overline{OP})^2 \quad \Rightarrow \quad (\overline{OP})^2 = 1 + (\overline{OS})^2$$

Por outro lado, temos

$$2 \overline{OP} = \overline{OW} + \overline{OT} = \overline{SW} + \overline{ST} = \overline{SW} + 2 \quad \Rightarrow \quad \overline{SW} = 2\overline{OP} - 2$$

E,

$$\overline{OS} = \overline{OW} - \overline{SW} = \overline{OP} - (2\overline{OP} - 2) = 2 - \overline{OP}$$

Assim,

$$(\overline{OP})^2 = 1 + (\overline{OS})^2 \Rightarrow (\overline{OP})^2 = 1 + (2 - \overline{OP})^2 \Rightarrow (\overline{OP})^2 = 1 + 4 - 4\overline{OP} + (\overline{OP})^2 \Rightarrow 4\overline{OP} = 5 \Rightarrow \overline{OP} = 5/4 \text{ cm}$$

Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

5ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Avaliador

Revisor

Três ingleses, quatro americanos e cinco franceses serão dispostos em fila (dispostos em linha reta) de modo que as pessoas de mesma nacionalidade estejam sempre juntas.

De quantas maneiras distintas a fila poderá ser formada de modo que o primeiro da fila seja um francês?

Cálculos e respostas:

$$\boxed{5 \text{ Franceses} \quad | \quad 3 \text{ Ingleses} \quad | \quad 4 \text{ Americanos}} \longrightarrow P_5 \times P_3 \times P_4$$

ou

$$\boxed{5 \text{ Franceses} \quad | \quad 4 \text{ Americanos} \quad | \quad 3 \text{ Ingleses}} \longrightarrow P_5 \times P_4 \times P_3$$

$$\text{Total de filas} \longrightarrow P_5 \times P_3 \times P_4 + P_5 \times P_4 \times P_3 = 17.280 + 17.280 = 34.560$$

A fila poderá ser formada de 34.560 maneiras distintas.

Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

6ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Avaliador

Revisor

Determine todos os valores possíveis de $m \in \mathbb{R}$, de modo que o polinômio

$$p(x) = x^3 + (m - 1)x^2 + (4 - m)x - 4$$

tenha três raízes distintas, sendo $x = 1$ a única raiz real.

Cálculos e respostas:

Se $x = 1$ é a única raiz real de $p(x)$, então as outras duas raízes são complexas.

Divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$:

	1	m-1	4-m	-4
1	1	m	4	<u>0</u>

Assim, $p(x) = (x - 1)(x^2 + mx + 4)$.

Para que as outras duas raízes de $p(x)$ sejam complexas, devemos ter

$$m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < m < 4$$

Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Avaliador

Revisor

Dos 135 funcionários de uma empresa localizada em Niterói, $\frac{2}{3}$ moram na cidade do Rio de Janeiro. Dos funcionários que moram na cidade do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$ usam ônibus até a estação das barcas e, em seguida, pegam uma barca para chegar ao trabalho. Sabe-se que 24 funcionários da empresa usam exclusivamente seus próprios automóveis para chegar ao trabalho, sendo que $\frac{1}{3}$ destes não mora na cidade do Rio de Janeiro. Os demais funcionários da empresa usam somente ônibus para chegar ao trabalho.

Determine:

- o número de funcionários da empresa que usam somente ônibus para chegar ao trabalho;
- o número de funcionários da empresa que usam somente ônibus para chegar ao trabalho e que não moram na cidade do Rio de Janeiro.

Cálculos e respostas:

Moram na cidade do Rio de Janeiro: $\frac{2}{3} \times 135 = 90$ funcionários.

Destes,

$$\frac{3}{5} \times 90 = 54 \text{ usam ônibus e barca.}$$

Além disso, 24 funcionários usam seus próprios automóveis.

Com base nesses dados, podemos construir o seguinte diagrama:

	R	\bar{R}
O	20	37
A	16	8
OB	54	

em que:

R = conjunto dos funcionários da empresa que moram na cidade do Rio de Janeiro

\bar{R} = conjunto dos funcionários da empresa que moram fora da cidade do Rio de Janeiro

O = conjunto dos funcionários da empresa que usam somente ônibus

OB = conjunto dos funcionários da empresa que usam ônibus e barca

A = conjunto dos funcionários da empresa que usam seus próprios automóveis

- 57 funcionários usam somente ônibus.
- 37 funcionários da empresa usam somente ônibus e moram fora da cidade do Rio de Janeiro.

Gabarito - MATEMÁTICA - Grupo G

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Avaliador

Revisor

Um reservatório, contendo inicialmente 400 litros de água, começa a receber água a uma razão constante de 3 litros por segundo, ao mesmo tempo que uma torneira deixa escoar água desse reservatório a uma razão, também constante, de 1 litro por segundo.

Considerando o instante inicial ($t = 0$) como o instante em que o reservatório começou a receber água, determine:

- a) o volume de água no reservatório decorridos dez segundos ($t = 10$) a partir do instante inicial;
- b) uma expressão para o volume (V), em litro, de água no reservatório em função do tempo decorrido (t), em segundo, a partir do instante inicial.

Cálculos e respostas:

- a) Em 10 segundos, o volume de água no reservatório será de

$$400 + 3 \times 10 - 1 \times 10 = 420 \text{ litros}$$

- b) $V(t) = 400 + 2 t$