

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)



Considere a função $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 7}$. Determine, se existirem:

- (i) os pontos de descontinuidade de f ;
- (ii) as assíntotas horizontais e verticais ao gráfico de f ;
- (iii) os intervalos onde f é crescente ou decrescente;
- (iv) os extremos relativos de f ;
- (v) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima ou para baixo;
- (vi) os pontos de inflexão do gráfico de f ;

Finalmente, esboce o gráfico de f .

Cálculos e respostas:

(i) A função $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 7}$ está definida e é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$, pois é um quociente de polinômios cujo denominador nunca se anula.

(ii) Como, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x^2}} = 0, \text{ temos}$$

que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

(iii) A função f é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-5x^2 + 35}{(x^2 + 7)^2}$ e, portanto, $f'(x) = 0$ se, e

somente se, $x = \pm\sqrt{7}$.

O sinal de f' é determinado pelo sinal do numerador.

Como $-5x^2 + 35$ tem como gráfico uma parábola com concavidade para baixo intersectando o eixo x das abscissas em $x = \pm\sqrt{7}$, vemos facilmente que $f'(x) < 0$ em $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ em $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

Concluimos, então, que f é decrescente em $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$ e crescente em $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

iv) Pelo item (iii), os pontos críticos de f são $x = \pm\sqrt{7}$.

De posse dos sinais de $f'(x)$ temos, pelo teste da derivada primeira, que f possui um mínimo relativo em $x = -\sqrt{7}$ e um máximo relativo em $x = \sqrt{7}$.

Poderíamos usar o teste da derivada segunda para chegar a mesma conclusão.

Com efeito, $f''(x) = \frac{10x^3 - 210x}{(x^2 + 7)^3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(-\sqrt{7}) = f'(\sqrt{7}) = 0$, f

" $(-\sqrt{7}) > 0$ e $f''(\sqrt{7}) < 0$, segue do teste da derivada segunda que f possui um mínimo relativo em $x = -\sqrt{7}$ e um máximo relativo em $x = \sqrt{7}$.

v) Como f é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f''(x) = \frac{10x^3 - 210x}{(x^2 + 7)^3} = 0$ se, e somente se, $x = 0$

ou $x = \pm\sqrt{21}$, para determinar os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima ou para baixo, devemos estudar o sinal de f'' em $(-\infty, -\sqrt{21}) \cup (-\sqrt{21}, 0) \cup (0, \sqrt{21}) \cup (\sqrt{21}, +\infty)$. Sendo o denominador $(x^2 + 7)^3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de f'' fica determinado pelo sinal do numerador. Como $10x^3 - 210x = x(10x^2 - 210)$, o sinal de f'' é o produto dos sinais das funções $g(x) = x$ e $h(x) = 10(x^2 - 21)$. Dispondo esses dados na tabela de sinais a seguir

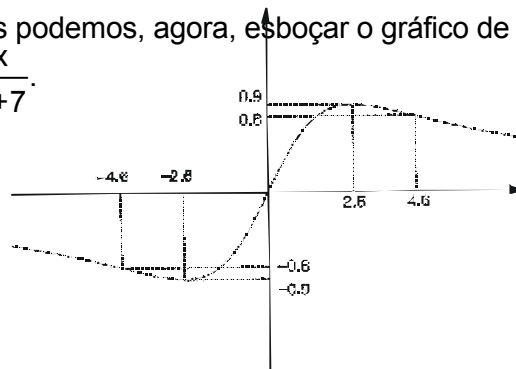
	$x < -\sqrt{21}$	$-\sqrt{21} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{21}$	$x > \sqrt{21}$
x	-	-	+	+
$10(x^2 - 21)$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	+	-	+

obtemos que o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\sqrt{21}, 0) \cup (\sqrt{21}, +\infty)$ e concavidade para baixo em $(-\infty, -\sqrt{21}) \cup (0, \sqrt{21})$.

vi) Pelo item (v), os únicos pontos de mudança de concavidade do gráfico de f são $(-\sqrt{21}, f(-\sqrt{21}))$, $(0, f(0)) = (0, 0)$ e $(\sqrt{21}, f(\sqrt{21}))$. Como o gráfico de f possui reta tangente em cada um deles (f é derivável em $0, -\sqrt{21}$ e $\sqrt{21}$), eles são os únicos pontos de inflexão do gráfico de f .

Reunindo todas as informações podemos, agora, esboçar o gráfico de f .

$$\text{Gráfico de } f(x) = \frac{5x}{x^2 + 7}.$$



2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

--	--

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada de segunda ordem contínua, tal que $f''(x) + f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f'(x)\sin x - f(x)\cos x$.

Mostre que g é uma função constante.

Cálculos e respostas:

É suficiente mostrarmos que $g'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f''(x)\sin x + f'(x)\cos x - (f'(x)\cos x + f(x)(-\sin x)) \\ &= f''(x)\sin x + f(x)\sin x \\ &= (f''(x) + f(x))\sin x \\ &= 0\sin x \\ &= 0. \end{aligned}$$

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

a) Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 12x + a, & x < -4 \\ -2\sqrt{|x|} & , x \geq -4 \end{cases}$$

Determine o valor de a para que f seja contínua em $x = -4$.

b) Seja $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo $[0,1]$ e diferenciável no intervalo $(0,1)$, com $g(0) = 2$ e $g(1) = 1$.

Mostre que existe um ponto do gráfico de g , tal que a reta tangente nesse ponto é paralela à reta $y = -x$.

Cálculos e respostas:

Devemos mostrar que $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = f(-4)$.

Temos $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} (-x^2 - 12x + a) = -16 + 48 + a = 32 + a$ e

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} -2\sqrt{|x|} = -2 \lim_{x \rightarrow -4^+} \sqrt{|x|} = -2 \times 2 = -4.$$

Daí, $32 + a = -4 = f(-4)$. Logo, $a = -36$.

b) Como g é contínua no intervalo fechado $[0,1]$ e diferenciável no intervalo aberto $(0,1)$,

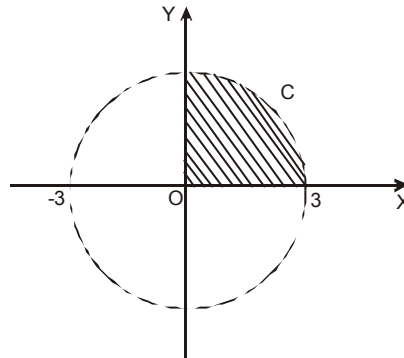
pelo teorema do Valor Médio, existe $c \in (0,1)$, tal que $g'(c) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 2}{1 - 0} = -1$.

Portanto, existe reta tangente t ao gráfico de g no ponto $(c, g(c))$, tal que o seu coeficiente angular é -1 . A reta t é paralela à reta $y = -x = (-1)x$.

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

--	--

Determine, usando o teorema Fundamental do Cálculo, a área da região hachurada na figura abaixo, onde C é o círculo de raio 3.



Cálculos e resposta:

A equação do círculo de raio 3 centrado na origem é $x^2 + y^2 = 9$. Essa curva define a função não-negativa $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, para $0 \leq x \leq 3$, cujo gráfico limita superiormente a região hachurada.

Pelo teorema Fundamental do Cálculo, a área A dessa região é:

$$A = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx$$

Resolvendo por substituição trigonométrica, temos:

$$\begin{cases} x = 3 \operatorname{sen} q, \text{ sendo } 0 \leq q \leq \frac{p}{2} \\ dx = 3 \cos q \, dq, \\ \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 q} = 3\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 q} = 3 \cos q. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx = \int_0^{\frac{p}{2}} (3 \cos q)(3 \cos q) \, dq = 9 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 q \, dq = 9 \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1 + \cos 2q}{2} \, dq = \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} (1 + \cos 2q) \, dq = \frac{9}{2} \left[\left(q + \frac{\operatorname{sen} 2q}{2} \right) \right]_0^{\frac{p}{2}} = \frac{9}{2} \left(\frac{p}{2} + \frac{\operatorname{sen} p}{2} \right) = \frac{9p}{4}. \end{aligned}$$

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

--	--

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear, tal que

$$T(x,y,z) = (x + y + z, x + 2y - z, -x - 3y + 3z)$$

- a) Determine a imagem de T.
- b) T é sobrejetora? Justifique.
- c) Determine a dimensão do núcleo de T.
- d) T é injetora? Justifique.

Cálculos e respostas:

a) O ponto (a,b,c) pertence à imagem de T se, e somente se, existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tal que $(a,b,c) = (x + y + z, x + 2y - z, -x - 3y + 3z)$.

Isso é equivalente a determinar as condições sobre a, b, c para que o seguinte sistema admita solução

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + 2y - z &= b \\ -x - 3y + 3z &= c \end{aligned}$$

Reduzindo por linhas à forma escada a matriz aumentada associada ao sistema, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & -1 & b \\ -1 & -3 & 3 & c \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2a-b \\ 0 & 1 & -2 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & -a+2b+c \end{array} \right]$$

Portanto, o sistema admite soluções se, e somente se, $-a + 2b + c = 0$ e

$$\text{Imagem}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a + 2b + c = 0\}.$$

b) Pelo item anterior, a imagem de T é o plano perpendicular ao vetor $(-1, 2, 1)$, subespaço do $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2. Logo, $\text{Imagem}(T) \neq \mathbb{R}^3$ e T não é sobrejetora.

c) Pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\begin{aligned} 3 = \dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(\text{Domínio de } T) \\ &= \dim(\text{Núcleo de } T) + \dim(\text{Imagem de } T) \\ &= \dim(\text{Núcleo de } T) + 2 \end{aligned}$$

Logo, $\dim(\text{Núcleo de } T) = 1$

d) T é injetora se, e somente se, $\text{Núcleo de } T = \{(0,0,0)\}$
se, e somente se, $\dim(\text{Núcleo de } T) = 0$.

PROAC / COSEAC - Gabarito

Pelo item anterior, T não é injetora.

	$x < -\sqrt{21}$	$-\sqrt{21} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{21}$	$x > \sqrt{21}$
x	—	—	+	+
$10(x^2 - 21)$	+	—	—	+
$f'(x)$	—	+	—	+