

## Prova de Conhecimentos Específicos

### 1ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

Considere a matriz  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Determine:

- a) a transposta de A.
- b) a inversa de A.
- c) os autovalores de A, para  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Cálculos e respostas:

$$A = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

a)

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix};$$

$$b) A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)^T$$

$$\det A = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \quad (\text{cof } A)^T = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} = A^T$$

$$c) \theta = \pi/4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det (A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right)^2 + 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \lambda + \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 - \sqrt{2} \lambda + \frac{3}{2} = 0 \quad \lambda = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-6}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 2i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i$$

**2ª QUESTÃO: (1,5 ponto)**

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

Calcule  $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx$

Cálculos e respostas:

$$I = \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B=3 \end{cases}$$

$$A=1$$

$$B=1$$

$$I = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = \ln(x-1) + \ln(x-2) + C$$

**3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)**

Dada a função  $f$  definida por  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + \frac{xy}{z})$ , determine seu vetor gradiente no ponto  $(1, 2, -2)$ .

Cálculos e respostas:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$f_x = \frac{2x + y/z}{x^2 + y^2 + xy/z} ; f_y = \frac{2y + x/z}{x^2 + y^2 + xy/z} ; f_z = \frac{-xy/z^2}{x^2 + y^2 + xy/z}$$

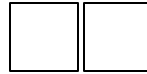
$$f_x(1, 2, -2) = \frac{2 - 1}{1 + 4 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$f_y(1, 2, -2) = \frac{4 - 1/2}{4} = \frac{7}{8}$$

$$f_z(1, 2, -2) = \frac{-1/2}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$\nabla f(1, 2, -2) = \left( \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{8} \right)$$

# 4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Calcule  $\int_R (x+y)dA$ , sendo R a região do plano definida por  
 $y \leq x, y \leq 2-x^2, y \geq 0$ .

Cálculos e respostas:

$$I = \int_R (x+y)dA = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y}} (x+y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_y^{\sqrt{2-y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{2-y}{2} + y\sqrt{2-y} - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[ y\sqrt{2-y} + 1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} \right] dy$$

$$\int_0^1 y\sqrt{2-y} dy = -2 \int_{\sqrt{2}}^1 (2-u^2)u^2 du = -2 \int_{\sqrt{2}}^1 2u^2 - u^4 du$$

$$2-y = u^2 \longrightarrow y=0 \longrightarrow u=\sqrt{2}$$

$$y = 2 - u^2 \quad y = 1 \longrightarrow u = 1$$

$$dy = -2udu$$

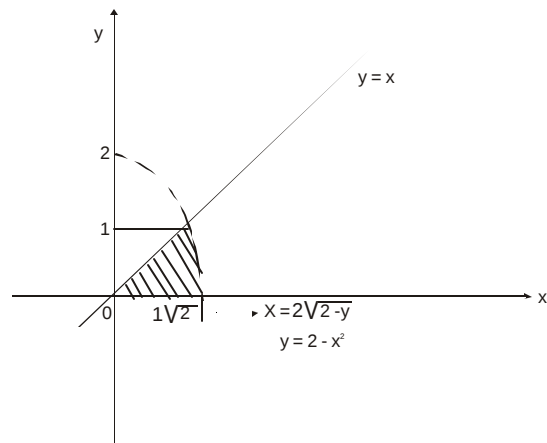
$$= -2 \left[ \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_{\sqrt{2}}^1$$

$$= -2 \left[ \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5} \right]$$

$$= -2 \left[ \frac{17}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{15} \right]$$

$$= -2 \left[ \frac{17}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right] + y \left( y - \frac{y^2}{4} \right) \Big|_0^1 - \frac{y^3}{2} \Big|_0^1 =$$

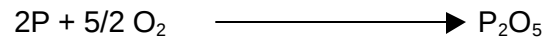
$$= -2 \left[ \frac{7}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{15} \right] + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{41}{60}$$



**5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)**

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

O fósforo é removido do aço por meio de um processo de oxidação segundo a reação:



Sabendo-se que o aço possui 0,020% de P, pede-se o peso de oxigênio necessário para se eliminar todo o P existente em 1 t de aço.

Dados: Pesos atômicos: P – 31  
O – 16

Cálculos e respostas:

Base de cálculo: 1000 kg de aço

P existente no aço:  $1000 \times 0,00020 = 0,20 \text{ kg}$

Oxigênio necessário:

$2 \text{ P} \longrightarrow 5/2 \text{ O}_2$

$2 \cdot 31 \longrightarrow 5/2 \cdot 16 \cdot 2$

$0,20 \longrightarrow x$

$$x = 0,20 \cdot \frac{5/2 \cdot 16 \cdot 2}{2 \cdot 31} = 0,258 \text{ kg oxigênio}$$

**6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)**

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

Um bronze-alumínio possui composição química em peso de 91% Cu e 9% Al. Qual a composição desta liga considerando-se percentagem de átomos?

Dados: Pesos Atômicos: Cu – 64  
Al – 27

Cálculos e respostas:

Base de cálculo: 1,0 kg de liga bronze-alumínio

Pesos de Cu e Al existentes em 1,0 kg da liga:

$$\text{Cu: } 1000 \text{ g} \times 0,91 = 910 \text{ g}$$

$$\text{Al: } 1000 \text{ g} \times 0,09 = 90 \text{ g}$$

Quantidade de átomos-grama existentes em 1,0 kg de liga:

$$\text{Cu: } \frac{910}{64} = 14,219 \text{ at.g}$$

$$\text{Al: } \frac{90}{27} = 3,333 \text{ at. g}$$

Total de átomos-grama em 1,0 kg da liga:

$$14,219 + 3,333 = 17,552$$

$$\begin{array}{l} \text{Composição em} \\ \quad \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} \% \text{ at . g} \quad \text{Cu : } \frac{14,219}{17,552} = 81,01\% \\ \% \text{ átomos} \\ \quad \quad \quad \% \text{ at . g} \quad \text{Al: } \frac{3,333}{17,552} = 18,99\% \end{array} \right. \end{array}$$

**7ª QUESTÃO: (1,5 ponto)**

Um volume de 1000 m<sup>3</sup> de gás produzidos em um alto-forno deixam este equipamento a uma pressão de 1,5 atm e 227 °C. Qual será seu volume a 1,0 atm de pressão e 27 °C?

Considere o comportamento deste gás como ideal.

Sabendo-se que este gás possui 30% de CO, qual será a pressão parcial de CO nas condições em que o gás deixa o equipamento?

Cálculos e respostas:

Base de cálculo: 1000 m<sup>3</sup> de gás a 1,5 atm e 227° C

Volume de gás nas condições pedidas:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$$

$$\frac{1,5 \text{ atm} \cdot 1000 \text{ m}^3}{(227 + 273) \text{ K}} = \frac{1,0 \text{ atm} \cdot V_1}{(27 + 273) \text{ K}} \Rightarrow V_1 = \frac{1,5 \cdot 1000 \cdot (27 + 273)}{1,0 \cdot (227 + 273)} = 900 \text{ m}^3$$

Pressão parcial de CO nas condições em que o gás deixa o equipamento:

Segundo a Lei de Dalton – A soma das pressões parciais dos gases numa mistura é igual a pressão total da mistura – podemos fazer:

$$P_{\text{CO}} = 1,5 \text{ atm} \times 0,30 = 0,45 \text{ atm}$$

**8ª QUESTÃO: (1,5 ponto)**

Uma solução de sulfato de cobre está rotulada como  $\text{CuSO}_4$  0,100 M. Que volume, em  $\text{cm}^3$ , desta solução contém 4,25 g de  $\text{CuSO}_4$ ?

Dados: Pesos Atômicos: Cu – 64

S – 32

O – 16

Cálculos e respostas:

Base de cálculo: 4,25 g de  $\text{CuSO}_4$  em solução 0,100 M

Peso molecular do  $\text{CuSO}_4$ :  $64 + 32 + 4 \times 16 = 160$  g

Número de moles de  $\text{CuSO}_4$  em 4,25 g desta substância:

$$\frac{4,25}{160} = 0,0266 \text{ moles}$$

Usando-se a concentração molar para converter-se moles de  $\text{CuSO}_4$  para  $\text{cm}^3$  de solução, temos:

$$0,0266 \text{ moles de } \text{CuSO}_4 \times \frac{1000 \text{ cm}^3 \text{ solução}}{0,100 \text{ mol } \text{CuSO}_4}$$

$$= 266 \text{ cm}^3 \text{ de solução}$$