PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

a) Determine números reais $a \neq 0$, b, c, e d tais que o gráfico de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha um ponto de inflexão em (1, 2) e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f neste ponto seja – 2.

b) Considere a equação $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$.

(i) Verifique que essa equação tem uma raiz no intervalo (0,1).

(ii) Usando o teorema de Rolle, mostre que essa raiz é única.

Cálculos e respostas:

a) Primeiramente, como (1,2) deve ser um ponto do gráfico de f, temos que $f(1) = 2$, ou seja, $a + b + c + d = 2$. Em segundo lugar, como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto (1,2) é dado por $f'(1)$, obtemos de $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f'(1) = -2$ que $3a + 2b + c = -2$. Finalmente, como queremos que (1,2) seja ponto de inflexão e como $f''(1)$ existe e $f''(x) = 6ax + 2b$, devemos ter $f''(1) = 0$, ou seja, $6a + 2b = 0$. Obtemos, assim, o sistema

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2, \\ 3a + 2b + c = -2, \\ 6a + 2b = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $b = -3a$, $c = -2 + 3a$ e $d = 4 - a$. Assim, para qualquer valor de $a \neq 0$, obtemos b, c, e d tais que a respectiva função f satisfaz as propriedades desejadas. Por exemplo, se tomarmos $a = 1$, obteremos $b = -3$, $c = 1$ e $d = 3$, ou seja, a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ satisfaz as propriedades desejadas.

b)

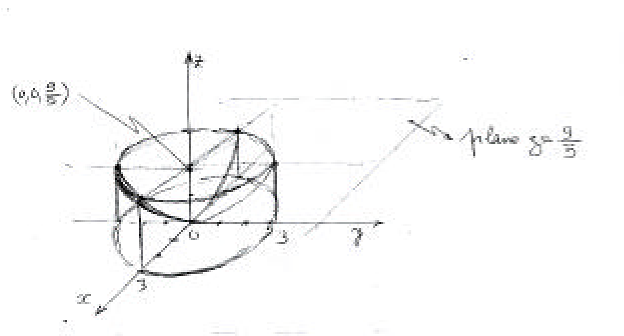
(i) A função $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3$ é contínua em [0,1]. Como $f(0) = -3 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, pelo teorema do valor intermediário existe $a \in (0,1)$ tal que $f(a) = 0$. Isso mostra que a equação $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ possui uma raiz no intervalo (0,1).

(ii) Vamos mostrar que ela é única. Com efeito, suponha que $b \in (0,1)$ seja uma outra raiz da equação com ,digamos, $a < b$. Então, temos que $f(a) = f(b) = 0$ e, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Mas $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ para todo $x \in (0,1)$; portanto tal b não pode existir.

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Encontre o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 5z$, o plano $z = 0$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Cálculos e respostas:



A interseção do parabolóide $x^2 + y^2 = 5z$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ acontece no plano $z = 9/5$ no conjunto $\{(x, y, 9/5);\ x^2 + y^2 = 9\}$.

O volume pedido é

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy, \quad \text{onde} \quad z = f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{5} \quad \text{e} \quad D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Reescrevendo D em coordenadas polares, temos: $D = \{(r, \theta);\ 0 \le r \le 3 \text{ e } 0 \le \theta \le 2\pi\}$.
Fazendo a mudança de variáveis na integral, obtemos:

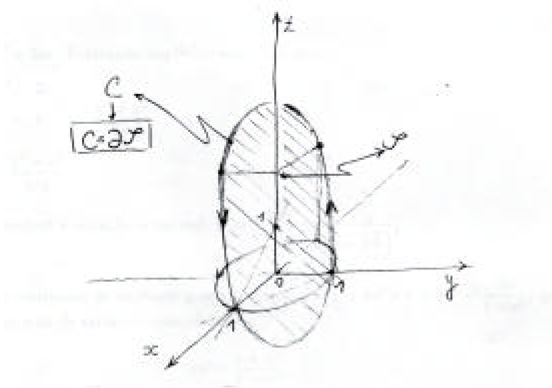
$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{r^2}{5}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{r^4}{20}\right]_0^3\right)d\theta = \frac{81\pi}{10}.$$

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Seja (x, y, z) = (yz + x^3, 2xz + 3y^2, xy + 4).

Utilize o teorema de Stokes para calcular $\int_C$ d onde C é a curva de interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano x + y + z = 1 e a projeção de C no plano z = 0 está orientada no sentido anti-horário.

Cálculos e respostas:



A parametrização da superfície S do plano é

S = { $\varphi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$; $0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$}.

Temos:

$\partial_u\varphi = (1,0, -1)$

$\partial_v\varphi = (0,1, -1)$

$\partial_u\varphi \times \partial_v\varphi = (1,1,1)$

$\|\partial_u\varphi \times \partial_v\varphi\| = V\ 3$

rot = (- x, 0 , z)

rot (φ(u, v)) = (– u , 0, 1 – u – v)

rot . $\vec{n}_\varphi = (-u,0,1 - u - v).\ \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \dfrac{-u+1-u-v}{\sqrt{3}} = \dfrac{1-2u-v}{\sqrt{3}}$

Cálculos e respostas:

Seja C o bordo da superfície S, isto é, C = ∂S.

Seja D = {(u, v); 0 ≤ u^2 + v^2 ≤ 1} a projeção de S no plano z = 0, que em coordenadas polares é {(r, θ); 0 ≤ r ≤ 1 e 0 ≤ θ ≤ 2π}

Então, pelo teorema de Stokes, obtemos:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}.\vec{n}_\varphi\, dS = \iint_D \frac{(1-2u-v)}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\, dudv = \int\int_D (1-2u-v)\, dudv =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-2r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, drd\theta = \pi$$

$4^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (2,0 pontos)

Identifique a família de curvas ortogonais à família de círculos $x^2 + y^2 = 2cx$.

Cálculos e respostas:

Seja $x^2 + y^2 = 2cx$. Derivando implicitamente, obtemos:

$2x + 2yy' = 2c$

$x + yy' = c = \dfrac{x^2 + y^2}{2x}$.

Assim, $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Queremos resolver a equação ortogonal: $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} = \dfrac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

Fazendo a substituição de variáveis $y = xv$, temos $y' = v + xv'$ e $v + xv' = \dfrac{2v}{1 - v^2}$, que é equivalente à equação de variáveis separáveis:

$xv' = \dfrac{v + v^3}{1 - v^2}$

Resolvendo, temos $\ln |v| - \ln |v^2 + 1| = \ln |x| + k'$.
Portanto, $\ln |x^2 + y^2| = \ln |y| + \ln |2k|$. Logo, $|x^2 + y^2| = |2ky|$. Assim, $x^2 + y^2 = 2cy$, que é equivalente a $x^2 + (y - c)^2 = c^2$, família de círculos com centro (0, c) e raio |c|.

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Seja T : $\longrightarrow$ a transformação linear, tal que

T(1,0,1) = (1,1,1,0), T(1,0, –1) = (1,1, –1,0) e T(0,1,0) = (0,0,1,0).

a) Determine T(x,y,z).

b) Determine uma base para a imagem de T.

c) T é injetora? Justifique.

Cálculos e respostas:

a) Primeiramente, fazemos a combinação linear:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= a(1, 0, 1) + b(1, 0, -1) + c(0, 1, 0)\\ &= (a + b, c, a - b)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} c &= y\\ a + b &= x\\ a - b &= z.\end{aligned}$$

Obtemos:

$$c = y,\ 2a = x + z \Rightarrow a = \frac{x+z}{2} \Rightarrow b = x - a = \frac{x-z}{2}$$

Portanto,

$$(x, y, z) = \frac{x+z}{2}(1, 0, 1) + \frac{x-z}{2}(1, 0, -1) + y(0, 1, 0)$$

$$\begin{aligned}T(x, y, z) &= \frac{x+z}{2}T(1, 0, 1) + \frac{x-z}{2}T(1, 0, -1) + yT(0, 1, 0)\\ &= \frac{x+z}{2}(1, 1, 1, 0) + \frac{x-z}{2}(1, 1, -1, 0) + y(0, 0, 1, 0)\\ &= \left(\frac{x+z}{2} + \frac{x-z}{2}, \frac{x+z}{2} + \frac{x-z}{2}, \frac{x+z}{2} - \frac{x-z}{2} + y, 0\right)\end{aligned}$$

$= \quad (x, x, z + y, 0).$

Cálculos e respostas:

b) Temos que:

Imagem (T) = [(1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0)] = [(1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 0)], pois (0, 0, 1, 0) = $\frac{1}{2}$(1, 1, 1, 0) - $\frac{1}{2}$(1, 1, -1, 0).

Como {(1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 0)} é linearmente independente, esse conjunto é uma base da imagem de T.

c) Pelo item anterior, dim Imagem (T) = 2. Pelo teorema do núcleo e da imagem,

$3 = \dim \quad = \dim \text{Imagem } (T) + \dim \text{Núcleo } (T)$

$= 2 + \dim \text{Núcleo } (T).$

Assim, dim Núcleo(T) = 1, Núcleo (T) $\neq$ {(0, 0, 0)} e T não é injetora.