PADRÃO DE RESPOSTA - MATEMÁTICA - GRUPOS I e J

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) O número $x = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}\right)$ é irracional; **(0,5 ponto)**

b) O valor da expressão $\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} \cdot \frac{x}{x+2}$, quando x = 9876, é igual a $\frac{1}{9874}$; **(0,5 ponto)**

c) Se x = 0,001, então $\frac{x^3 \cdot 3^x}{3^{x-1} \cdot x^4} = 1000$; **(0,5 ponto)**

d) O valor real de x que torna a igualdade $\log_{10}(-\log_{10}x^3 + \log_{10}x) = 1$ verdadeira é menor do que um. **(0,5 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) Tem-se $x = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 2\sqrt{2} = 2+1+2\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 3.$ Portanto, a afirmação é falsa.

b) Tem-se

$$\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x}{x+2}.$$

Portanto, para x diferente de zero, diferente de 2 e diferente de -2, pode-se escrever

$$\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x-2}.$$

Fazendo $x = 9876$, tem-se $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{9874}$. Assim, a afirmação é verdadeira.

c) Tem-se $\frac{x^3 \cdot 3^x}{3^{x-1} \cdot x^4} = \frac{3 \cdot 3^{x-1}}{3^{x-1} \cdot x} = \frac{3}{x}$. Assim, para x = 0,001, o valor numérico da expressão é

$\frac{3}{0,001} = 3000.$ Portanto, a afirmação é falsa.

Cálculos e respostas:

d) Observem-se as equivalências

$$\log_{10}(-\log_{10} x^3 + \log_{10} x) = 1 \Leftrightarrow -\log_{10} x^3 + \log_{10} x = 10 \Leftrightarrow -3\log_{10} x + \log_{10} x = 10$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} x = -5 \Leftrightarrow x = 10^{-5} = \frac{1}{10^5} < 1.$$

Logo, a afirmação é verdadeira.

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Diz-se que um vetor $v = (a, b, c)$ em $\mathbb{R}^3$ é ***combinação linear*** dos vetores

$$v_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad v_2 = (a_2, b_2, c_2) \quad \text{e} \quad v_3 = (a_3, b_3, c_3),$$

se existem números reais t_1, t_2 e t_3 tais que $v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3$, isto é, se existem números reais t_1, t_2 e t_3 tais que

$$(a, b, c) = t_1 (a_1, b_1, c_1) + t_2 (a_2, b_2, c_2) + t_3 (a_3, b_3, c_3).$$

Verifique se o vetor $v = (4, -3, 2)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, -1, 1)$. Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

O vetor $v = (4, -3, 2)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, -1, 1)$ se, e somente se, existem números reais t_1, t_2 e t_3 tais que

$$(4, -3, 2) = t_1 (1, 1, 0) + t_2 (0, 1, 1) + t_3 (1, -1, 1),$$

isto é, se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} t_1 \phantom{{}+t_2} + t_3 = 4 \\ t_1 + t_2 - t_3 = -3 \\ \phantom{t_1 +{}} t_2 + t_3 = 2 \end{cases}$$

possui pelo menos uma solução. Resolvendo-se o sistema, encontra-se uma única solução $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ e $t_3 = 3$. Assim, v é combinação linear de v_1, v_2 e v_3:

$$(4, -3, 2) = 1\,(1, 1, 0) - 1\,(0, 1, 1) + 3\,(1, -1, 1).$$

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

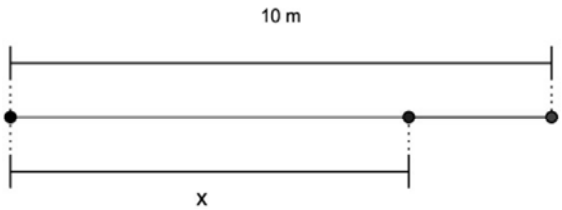
Avaliador | | Revisor | |

Um barbante de 10 metros de comprimento será cortado em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho). Um dos pedaços será usado para se construir um quadrado e o outro pedaço será usado para se construir um triângulo equilátero.

Sendo x a medida em metros do pedaço do barbante a ser usado para construir o quadrado, determine:

a) As áreas do quadrado e do triângulo em função de x. Justifique sua resposta; **(1,0 ponto)**

b) O valor de x que torna a soma S das áreas do quadrado e do triângulo a menor possível. Justifique sua resposta. **(1,0 ponto)**



Cálculos e respostas:

a) Para $0 < x < 10$, os perímetros do quadrado e do triângulo equilátero são iguais a x e $10 - x$, respectivamente. Assim, cada lado do quadrado mede $x/4$ e cada lado do triângulo equilátero mede $(10 - x)/3$. Portanto, para $0 < x < 10$, as áreas Q do quadrado e T do triângulo são dados, respectivamente, por

$$Q = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} \quad \text{e} \quad T = \frac{\left(\frac{10 - x}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{9}x + \frac{25\sqrt{3}}{9}.$$

b) A soma S das áreas dessas duas figuras é dada pela função quadrática:

$$S = Q + T = \left(\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{9}x + \frac{25\sqrt{3}}{9},$$

cujo valor mínimo é assumido em

$$x = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{9}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{16}\right)} = \frac{40\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 9},$$

uma vez que $0 < x < 10$.

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

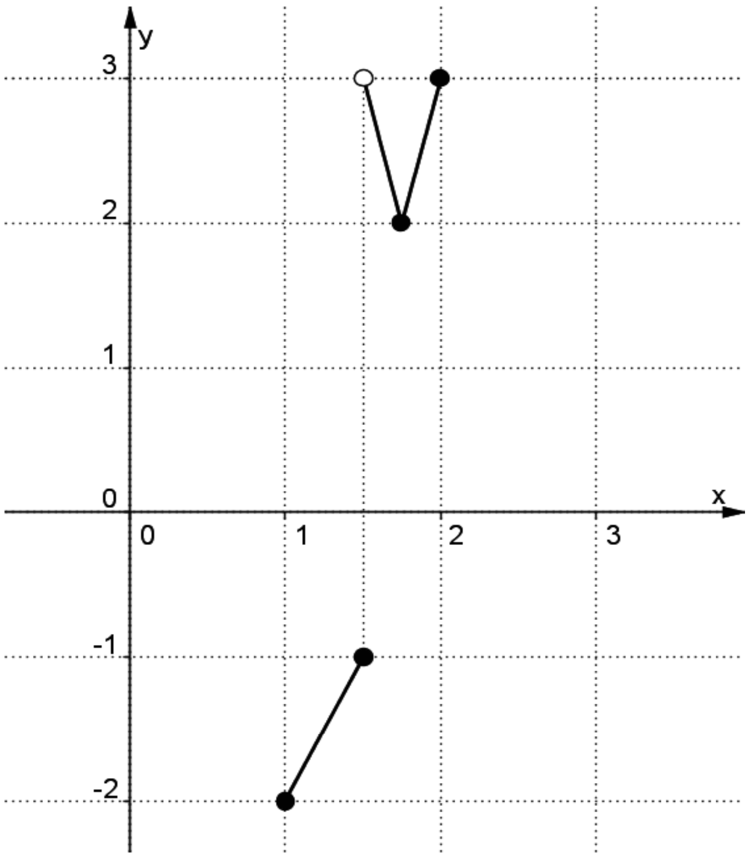
Avaliador

Revisor

Esboce, no **sistema de eixos coordenados abaixo**, o gráfico de uma função real y = f(x) cujo domínio é o intervalo [1, 2] e cuja imagem é o conjunto [–2, –1] $\cup$ [2, 3].

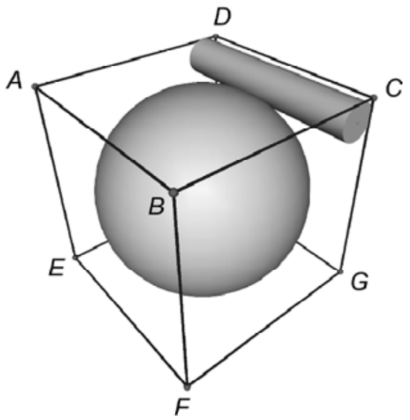
Cálculos e respostas:

Existem infinitas funções que satisfazem as condições estabelecidas no enunciado. Uma possível solução está esboçada abaixo.



5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

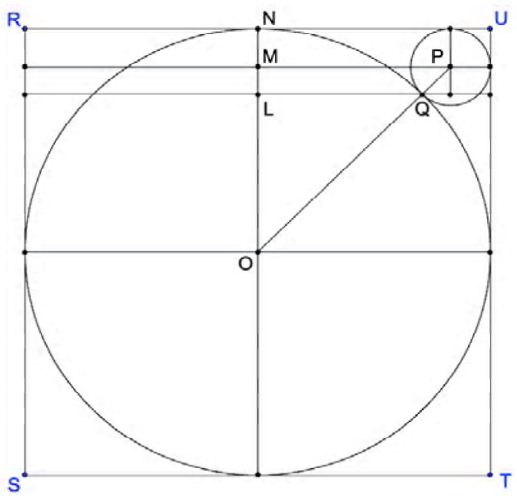
Na figura abaixo, uma esfera encontra-se inscrita em um cubo de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H*. Um tronco de cilindro circular reto, por sua vez, tem uma base contida na face *BFGC* do cubo, outra base contida na face *DHEA* e superfície lateral tangente à esfera e às faces *DABC* e *CGHD*.



Se cada aresta do cubo mede 4 cm, determine a medida do raio da base do tronco de cilindro. Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

Existem várias maneiras de se resolver essa questão. Uma delas é a seguinte. Sejam *R*, *S*, *T* e *U* os pontos médios das arestas *AB*, *EF*, *GH* e *CD*. As interseções do plano, que contém os pontos *R*, *S*, *T* e *U*, com o cubo, com a esfera e com o tronco de cilindro são, respectivamente, o quadrado *RSTU*, o círculo de centro *O* e o círculo de centro *P* na figura a seguir.



Sejam N o ponto médio do segmento RU e Q o ponto de interseção do segmento OP com o círculo de centro O. Sejam também L e M os pontos de interseção do segmento ON com os segmentos paralelos ao segmento ST passando por Q e P, respectivamente. Se r e s denotam, respectivamente, os raios dos círculos de centro O e P, respectivamente, então

$$\overline{OL} + \overline{LM} + \overline{MN} = \overline{ON} \Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{2} + \frac{s\sqrt{2}}{2} + s = r \Rightarrow s = \frac{r\,(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}.$$

Como $r = 2$ cm, concluí-se que o raio da base do tronco de cilindro reto mede

$$s = \frac{2\,(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}\text{ cm} = 6 - 4\sqrt{2}\text{ cm}.$$