PADRÃO DE RESPOSTA - MATEMÁTICA - GRUPOS G

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | Revisor

Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) O número $x = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}\right)$ é irracional; **(0,5 ponto)**

b) O valor da expressão $\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} \cdot \frac{x}{x+2}$, quando x = 9876, é igual a $\frac{1}{9874}$; **(0,5 ponto)**

c) Se x = 0,001, então $\frac{x^3 \cdot 3^x}{3^{x-1} \cdot x^4} = 1000$; **(0,5 ponto)**

d) O valor real de x que torna a igualdade $\log_{10}(-\log_{10}x^3 + \log_{10}x) = 1$ verdadeira é menor do que um. **(0,5 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) Tem-se $x = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 2\sqrt{2} = 2+1+2\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 3.$ Portanto, a afirmação é falsa.

b) Tem-se

$$\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x}{x+2}.$$

Portanto, para x diferente de zero, diferente de 2 e diferente de -2, pode-se escrever

$$\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x-2}.$$

Fazendo $x = 9876$, tem-se $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{9874}$. Assim, a afirmação é verdadeira.

c) Tem-se $\frac{x^3 \cdot 3^x}{3^{x-1} \cdot x^4} = \frac{3 \cdot 3^{x-1}}{3^{x-1} \cdot x} = \frac{3}{x}$. Assim, para x = 0,001, o valor numérico da expressão é

$\frac{3}{0{,}001} = 3000.$ Portanto, a afirmação é falsa.

Cálculos e respostas:

d) Observem-se as equivalências

$\log_{10}(-\log_{10} x^3 + \log_{10} x) = 1 \Leftrightarrow -\log_{10} x^3 + \log_{10} x = 10 \Leftrightarrow -3\log_{10} x + \log_{10} x = 10$

$\Leftrightarrow \log_{10} x = -5 \Leftrightarrow x = 10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} < 1.$

Logo, a afirmação é verdadeira.

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Colocando-se 24 litros de combustível no tanque de uma caminhonete, o ponteiro do marcador, que indicava $\frac{1}{4}$ do tanque, passou a indicar $\frac{5}{8}$.

Determine a capacidade total do tanque de combustível da caminhonete. Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

Considere x a capacidade total do tanque de combustível da caminhonete.

Tem-se

$$\frac{1}{4}x + 24 = \frac{5}{8}x \Leftrightarrow \frac{5}{8}x - \frac{1}{4}x = 24 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x = 24 \Leftrightarrow x = 64 \text{ litros.}$$

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Fixado um sistema de coordenadas retangulares no plano, sejam T o triângulo cujos vértices são os pontos (-2,0), (2,0) e (0,3), e R o retângulo de vértices (-x ,0), (x,0), 0 < x < 2, e cujos outros dois vértices também estão sobre os lados de T.

Determine o valor de x para o qual a área de R é máxima. Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

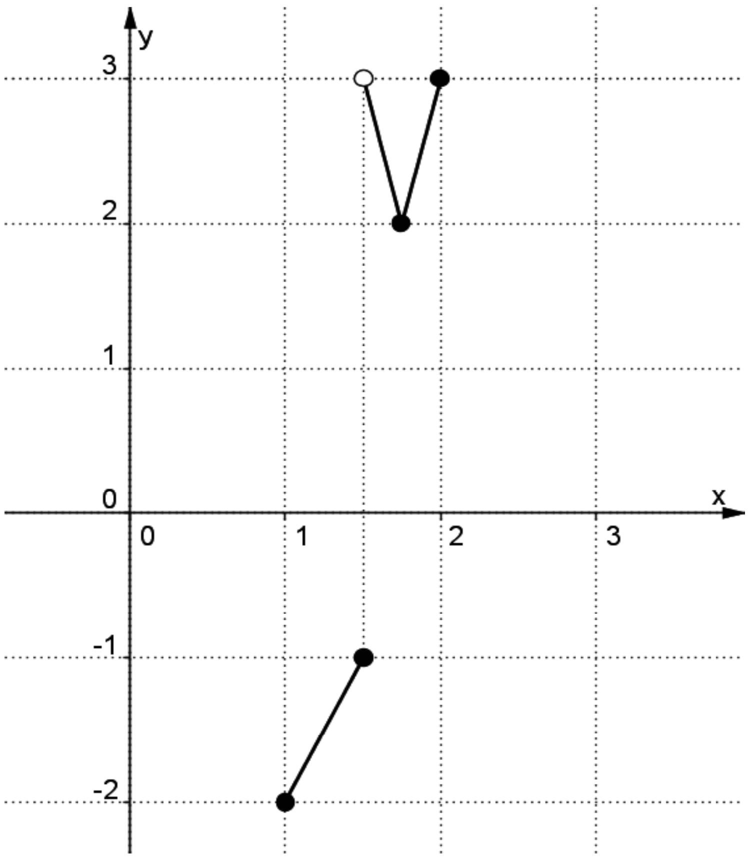
Uma equação para a reta que passa pelos pontos (2,0) e (0,3) é $y = -\frac{3}{2}x + 3$, portanto a área do referido retângulo é dada pela expressão $y = A(x) = 2x(-\frac{3}{2}x + 3) = -3x^2 + 6x$, que é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola de vértice no ponto (1,3) e concavidade voltada para baixo. Assim, o valor de x que torna a área máxima é igual a 1.

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Esboce, no **sistema de eixos coordenados abaixo**, o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo [1, 2] e cuja imagem é o conjunto [–2, –1] ∪ [2, 3].

Cálculos e respostas:

Existem infinitas funções que satisfazem as condições estabelecidas no enunciado. Uma possível solução está esboçada abaixo.



5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Dado um conjunto A, o *conjunto das partes* de A, denotado por $P(A)$, é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.

Se A tem 10 elementos, determine:

a) o número de subconjuntos de A que possuem exatamente dois elementos; (1,0 ponto)

b) a probabilidade de que, ao se escolher aleatoriamente um elemento de P(A), esse seja um subconjunto de A com exatamente dois elementos. **(1,0 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) $C_2^{10} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$

b) Note-se que o número de elementos de P(A) é igual a 2^{10}.
Logo, a probabilidade de, ao se escolher aleatoriamente um elemento de P(A), esse subconjunto de A possuir exatamente dois elementos é

$$\frac{45}{2^{10}} = \frac{45}{1024}.$$