Padrão de respostas às questões discursivas

A seguir encontram-se as questões das provas discursivas da 2ª ETAPA do Vestibular UFF 2011, acompanhadas das respostas esperadas pelas bancas.

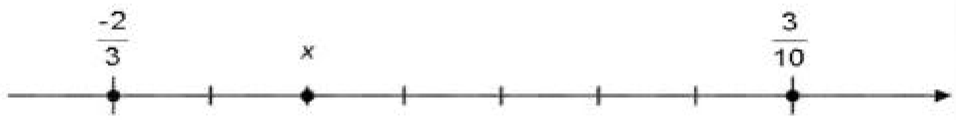
MATEMÁTICA - GRUPO G

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

a) Determine os 3 (três) primeiros dígitos da representação decimal do número $\frac{14}{13}$; ou seja, escrevendo $\frac{14}{13} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, com $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, determine os valores de a_0, a_1 e a_2. **(0,5 ponto)**

b) Sendo **a** = 2^{3000} e **b** = 3^{2000}, verifique se **a** é igual, maior ou menor do que **b**. Justifique sua resposta. **(0,5 ponto)**

c) Considerando que, na reta real esboçada abaixo, o intervalo $\left[\frac{-2}{3}, \frac{3}{10}\right]$ está dividido em 7 (sete) partes iguais, determine o número que corresponde ao ponto x indicado na figura e escreva sua resposta em forma de fração irredutível. **(1,0 ponto)**



Cálculos e respostas:

a) Dividindo-se 14 por 13,

$$
\begin{array}{r|l}
14 & 13 \\
-13 & 1{,}07 \\
\hline
10 & \\
-0 & \\
\hline
100 & \\
-91 & \\
\hline
9 &
\end{array}
$$

obtém-se a representação decimal $\frac{14}{13} = 1{,}07\ldots$. Portanto os 3 (três) primeiros dígitos de tal representação são: 1, 0 e 7.

(b) $\mathbf{a} = 2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$; $\mathbf{b} = 3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$. Como 8^{1000} é menor do que 9^{1000}, **a** é menor do que **b**.

(c) O comprimento do intervalo é $\frac{3}{10} - (-\frac{2}{3}) = \frac{29}{30}$. Como ele foi dividido em 7 partes iguais, os comprimentos de cada um dos novos intervalos é $\frac{29}{30} : 7 = \frac{29}{210}$. Portanto, o ponto x corresponde ao número real $\frac{-2}{3} + \frac{29}{210} + \frac{29}{210} = \frac{-41}{105}$.

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Em um concurso público, 980 candidatos (sendo 560 mulheres e 420 homens) fizeram o exame de seleção que constava de uma prova de conhecimentos gerais. A média aritmética das notas dos 980 candidatos foi 4,50 (quatro e meio) e a média aritmética das notas das mulheres foi 90% desse valor.

Calcule a média aritmética das notas dos 420 candidatos homens.

Cálculos e respostas:

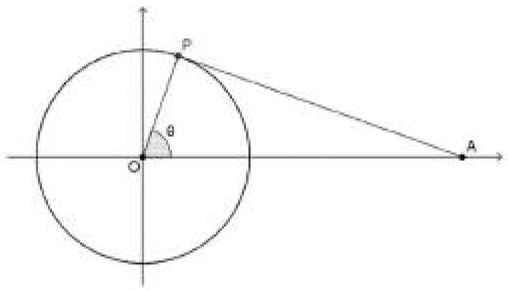
Sendo x a soma das notas de todas as mulheres e y a soma das notas de todos os homens, tem-se:

$$\frac{x+y}{980} = 4{,}50 \quad e \quad \frac{x}{560} = 4{,}5 \cdot \frac{90}{100} = 4{,}05 .$$

Resolvendo o sistema obtém-se, $x = 2268$ e $y = 2142$. Portanto, a média aritmética dos candidatos homens foi $\frac{2142}{420} = 5{,}10$.

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Fixado um sistema de coordenadas retangulares no plano, sejam $A = (3,0)$, $O = (0,0)$ e P um ponto sobre o círculo de centro em $O = (0,0)$ e raio 1. Sabe-se que a medida, em radianos, do ângulo $\theta = A\hat{O}P$, indicado na figura, pertence ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ e que o segmento AP é tangente ao círculo no ponto P.



Determine:

a) o comprimento do cateto AP do triângulo retângulo AOP; **(0,5 ponto)**

b) o seno do ângulo $\theta = A\hat{O}P$; **(0,5 ponto)**

c) as coordenadas do ponto P. **(1,0 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo AOP, obtém-se

$$3^2 = 1^2 + \overline{AP}^2 \Rightarrow \overline{AP} = 2\sqrt{2}.$$

b) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) As coordenadas do ponto P são $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}}, \dfrac{\overline{AP}}{\overline{OA}}) = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3})$

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Seja f a função definida por $f(x) = \dfrac{5}{3e^x - 7}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \ln\frac{7}{3}$.

Determine:

a) o menor inteiro maior do que f(ln 3); **(0,4 ponto)**
b) o valor de x que satisfaz a equação f(x) = − 1; **(0,4 ponto)**
c) os valores de x que satisfazem a inequação f(x) > 0. **(1,2 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) $f(\ln 3) = \dfrac{5}{3e^{\ln 3} - 7} = \dfrac{5}{9-7} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$. Portanto, o menor inteiro pedido é 3.

b) $f(x) = -1 \Leftrightarrow 3e^x - 7 = -5 \Leftrightarrow 3e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{2}{3}$.

c) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3e^x - 7 > 0 \Leftrightarrow e^x > \dfrac{7}{3} \Leftrightarrow x > \ln\dfrac{7}{3}$.

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

O diretor de uma escola quer montar uma equipe de quatro monitores voluntários, sendo que cada um deles atuará em apenas uma das quatro disciplinas: Matemática, Física, Química e Português. Sete alunos se candidatam para serem monitores: Abel, Bia, Cauê, Davi, Enzo, Fábio e Lia. Sabe-se que, entre os candidatos, apenas Fábio e Lia apresentaram algumas restrições para participar da equipe de monitores: Lia não aceita ser monitora de Matemática ou Física e Fábio só aceita participar se ele for monitor de Matemática. Sabe-se também que, caso sejam escolhidos para compor uma equipe de monitores, as restrições de Fábio e Lia serão atendidas.

Determine:

a) quantas equipes diferentes de monitores o diretor poderá formar, excluindo Lia e Fábio ao mesmo tempo; **(0,5 ponto)**

b) quantas equipes diferentes de monitores o diretor poderá formar, incluindo Lia e Fábio ao mesmo tempo; **(0,5 ponto)**

c) quantas equipes diferentes de monitores o diretor poderá formar ao todo. **(1,0 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) Excluindo-se Lia e Fábio, sobram 5 alunos que podem ser alocados, sem restrições, para atuarem nas 4 disciplinas. Portanto, utilizando-se o Princípio Fundamental da Contagem, tem-se 5x4x3x2 = 120 equipes distintas que podem ser formadas.

b) Se Fábio participa da equipe, a escolha do aluno que atuará em Matemática é única. Como Lia não aceita ser monitora de Física, a escolha para a monitoria dessa disciplina pode ser feita de 5 maneiras distintas, utilizando-se os candidatos restantes. Prosseguindo, se Lia atuar em Português, restam 4 possibilidades para o preenchimento da vaga de Química e se ela atuar em Química, restam 4 possibilidades para a escolha do aluno que atuará em Português. Portanto, tem-se (1 x 5 x 1 x 4) + (1 x 5 x1 x 4) = 40 equipes diferentes de monitores com as participações simultâneas de Lia e Fábio.

c) Examinemos o que acontece se Lia participar das possíveis equipes e Fábio não. Como Lia não aceita trabalhar em Matemática e nem em Física, feita a escolha para a atuação em Matemática (5 modos distintos) existirão 4 possibilidades para o preenchimento da vaga em Física. Feitas essas escolhas, se Lia atuar em Português restarão 3 maneiras distintas de se preencher a vaga de Química e se ela atuar em Química, restarão 3 maneiras distintas de se preencher a vaga de Português. Portanto, tem-se (5 x 4 x 1 x 3) + (5 x 4 x 3 x 1) = 120 equipes diferentes que podem ser formadas.

Examinemos o que acontece se Fábio participar das possíveis equipes e Lia não. Como Fábio só aceita atuar em Matemática, sobram 5 alunos que podem ser alocados, sem restrições, nas 3 disciplinas restantes. Tem-se então 1 x 5 x 4 x 3 = 60 equipes diferentes de monitores com a participação de Fábio e a exclusão de Lia.

O número total de equipes de monitores é igual ao número de equipes sem Fábio e sem Lia (120), mais o número de equipes com Fábio e com Lia (40), mais o número de equipes sem Fábio e com Lia (120), mais o número de equipes com Fábio e sem Lia (60): 120 + 40 + 120 + 60 = 340.