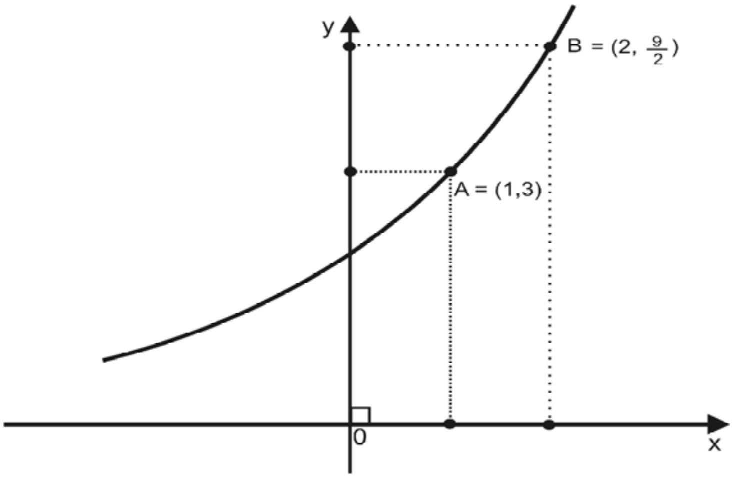
Gabarito - Matemática - Grupos I e J

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

O gráfico da função exponencial *f*, definida por $f(x) = k \cdot a^x$, foi construído utilizando-se o programa de geometria dinâmica gratuito GeoGebra (http://www.geogebra.org), conforme mostra a figura a seguir:



Sabe-se que os pontos A e B, indicados na figura, pertencem ao gráfico de *f*. Determine:

a) os valores das constantes *a* e *k*;

b) $f(0)$ e $f(3)$.

Cálculos e respostas:

a) Como $f(2) = 9/2$ e $f(1) = 3$, tem-se $9/2 = k\,a^2$ e $3 = k\,a$, portanto $k = 2$ e $a = 3/2$.

b) Usando-se os resultados obtidos no item anterior, tem-se $f(x) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Assim,

$f(0) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 2$ **e** $f(3) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{4}$.

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | Revisor

Nos itens abaixo, **arccos** denota a função inversa da função **cosseno** restrita ao intervalo $[0,\pi]$ e **arctg** denota a função inversa da função **tangente** restrita ao intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

a) Calcule $\arccos(\cos(\frac{\pi}{5}))$.

b) Calcule sen(arctg(−1)).

c) Verifique que sen(arccos(x)) = $\sqrt{1-x^2}$ para todo $x \in [-1,1]$.

Cálculos e respostas:

a) Como arccos é a função inversa da função cosseno restrita ao intervalo $[0,\pi]$, segue-se que

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=\frac{\pi}{5}.$$

b) $$\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(-1))=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

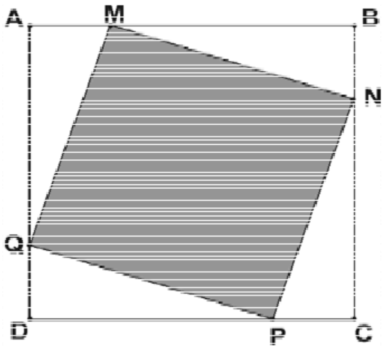
c) Tem-se:

$$\cos^2(\arccos(x))+\operatorname{sen}^2(\arccos(x))=1\Rightarrow x^2+\operatorname{sen}^2(\arccos(x))=1\Rightarrow \operatorname{sen}^2(\arccos(x))=1-x^2$$
$$\Rightarrow\sqrt{\operatorname{sen}^2(\arccos(x))}=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\left|\operatorname{sen}(\arccos(x))\right|=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\operatorname{sen}(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2},$$

pois, para $x\in[-1,1]$, $\arccos(x)\in[0,\pi]$ e, nesse intervalo, a função seno é não negativa.

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

A figura abaixo representa um quadrado MNPQ inscrito no quadrado ABCD cuja área mede 16 cm^2.



Determine:

a) as medidas de AM e MB para que a área do quadrado MNPQ seja igual a 9 cm^2;

b) as medidas de AM e MB para que a área do quadrado MNPQ seja a menor possível.

Justifique suas respostas.

Cálculos e respostas:

a) Os triângulos retângulos AMQ e BNM possuem ângulos correspondentes congruentes e hipotenusas de mesma medida. Portanto, eles são congruentes e, assim, $\overline{AM} = \overline{BN}$. Como cada lado do quadrado ABCD tem medida 4 cm, escrevendo-se $x = \overline{AM}$, tem-se $\overline{AQ} = \overline{BM} = \overline{AB} - \overline{AM} = 4 - x$. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AMQ, tem-se

$$x^2 + (4-x)^2 = 9$$

Logo, $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $\overline{AM} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm e $\overline{MB} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm ou $\overline{AM} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$cm e $\overline{MB} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

b) A área $A(x)$ do quadrado MNPQ em função da medida x do segmento AM é dada por

$$A(x) = x^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 8x + 16, \text{ com } 0 \le x \le 4.$$

O valor mínimo de A é atingido na abscissa do vértice da parábola que é gráfico de A. Logo, $\overline{AM} = \overline{MB} = 2$ cm.

Espaço reservado para rascunho

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Dois dados cúbicos não viciados, cujas faces estão numeradas de 1 a 6, são jogados aleatoriamente e simultaneamente sobre uma mesa plana. Se a soma dos valores sorteados(*) for um número par, Paulo ganha a partida. Se a soma for um número ímpar, Lúcia ganha. Ao perder a primeira partida, Lúcia diz que não irá mais jogar porque a regra favorece Paulo. Seu argumento é o seguinte: dentre os onze valores possíveis para a soma (os inteiros de 2 a 12), há seis números pares e apenas cinco números ímpares. Logo, Paulo tem maior probabilidade de ganhar.

a) Calcule a probabilidade de Lúcia ganhar uma partida. Justifique sua resposta.

b) Use o item **a** para verificar se o argumento de Lúcia está correto.

(*) Valor sorteado é o número escrito na face do cubo oposta à face que está apoiada na mesa.

Cálculos e respostas:

a) O espaço amostral desse experimento é o conjunto A, com 36 elementos:

A = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }.

O evento “a soma dos valores sorteados é um número ímpar” é o conjunto E, com 18 elementos:

E = { (1, 2), (1, 4), (1, 6),
(2, 1), (2, 3), (2, 5),
(3, 2), (3, 4), (3, 6),
(4, 1), (4, 3), (4, 5),
(5, 2), (5, 4), (5, 6),
(6, 1), (6, 3), (6, 5) }.

Logo, a probabilidade de Lúcia ganhar é igual a 18/36 = 1/2 = 50%.

b) O cálculo feito no item (a) mostra que Paulo e Lúcia têm a mesma probabilidade de ganhar uma partida.

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$.

a) Verifique se o número complexo *i* é raiz de *p*(*x*).

b) Calcule todas as raízes complexas de *p*(*x*).

Cálculos e respostas:

a) Como $p(i) = i^4 + 2i^3 + 3i^2 + 2i + 2 = 1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0$, segue-se que *i* é uma raiz de *p*(*x*).

b) Como *i* é raiz de *p*(*x*), $-i$ também é. Portanto, o polinômio *p*(*x*) é divisível por $(x-i)(x+i) = x^2+1$. Dividindo-se *p*(*x*) por x^2+1, obtemos x^2+2x+2. Portanto,

$$p(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right).$$

Para determinarmos as outras raízes de *p*(*x*), basta resolver a equação $x^2+2x+2=0$. Logo, as raízes de *p*(*x*) são i, $-i$, $-1+i$ e $-1-i$.