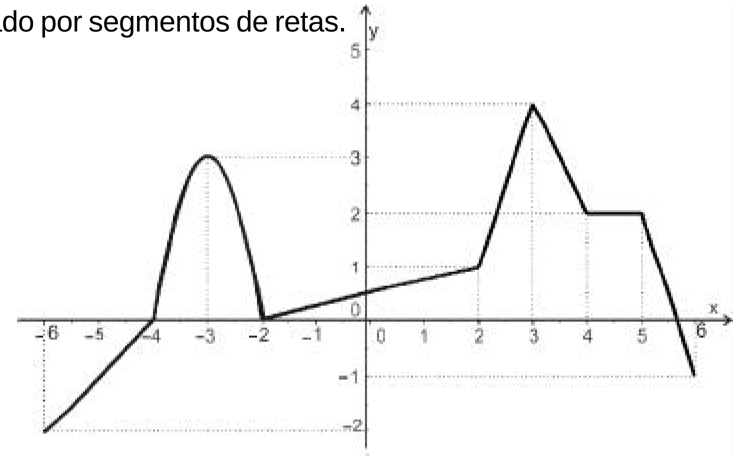
**MATEMÁTICA - Gabarito Grupos I e J**

## 1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | | Revisor |

A figura abaixo exibe o gráfico de uma função y = $f$ (x) definida no intervalo [-6,+6]. O gráfico de $f$ passa pelos pontos seguintes: (-6,-2),(-4,0), (-3,3),(-2,0),(2,1),(3,4),(4,2),(5,2) e (6,-1). Exceto no intervalo [-4,-2], o gráfico de $f$ é formado por segmentos de retas.




a) Calcule $f\left(\frac{9}{2}\right)$.

b) Determine a imagem de $f$.

c) Quantas soluções distintas possui a equação $f(x) = 1$? E a equação $f(x) = 2$? Justifique as suas respostas.

d) A função $f$ é crescente no conjunto $C = [-4,-3] \cup [2,3]$? Justifique a sua resposta.

Cálculos e respostas:

a) Como $\frac{9}{2}$ pertence ao intervalo $[4,5]$, o gráfico nos mostra que $f\left(\frac{9}{2}\right) = 2$.

b) Imagem de $f = [-2,4]$.

c) A equação $f(x) = 1$ tem quatro soluções distintas, pois a reta $y = 1$ intercepta o gráfico de $f$ em quatro pontos diferentes. A equação $f(x) = 2$ tem infinitas soluções, pois a reta $y = 2$ intercepta o gráfico de $f$ em infinitos pontos.

d) Não, pois $-3$ e 2 são elementos de *C*, $-3 < 2$ e $f(-3) > f(2)$.

**MATEMÁTICA - Gabarito Grupos I e J**

**2ª QUESTÃO:** (2,0 pontos)     Avaliador [ ]     Revisor [ ]

Seja *r* a reta $y = -2x$.
Pede-se:

a) as coordenadas do ponto P que está no segundo quadrante, sobre a reta *r* e cuja distância ao ponto (0, –1) é $\sqrt{10}$ unidades;

b) as coordenadas do ponto Q, sobre a reta *r*, que está mais próximo do ponto (0, –1).

Cálculos e respostas:

a) As coordenadas do ponto P são da forma P = $(x, -2x)$.

Portanto queremos que $x^2 + (-2x+1)^2 = 10$. Ou ainda, $5x^2 - 4x - 9 = 0$. Como P está no segundo quadrante, $x = -1$ e $P = (-1, 2)$.

b) Seja *s* a reta ortogonal à reta $y = -2x$ e que passa pelo ponto (0, –1).

A equação de *s* é $y = +\frac{1}{2}x - 1$.

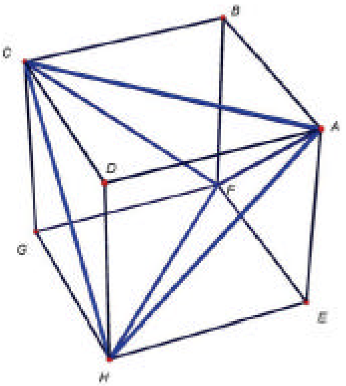
O ponto de *r* mais próximo de (0, –1) é o ponto de interseção das retas *s* e *r* : $\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

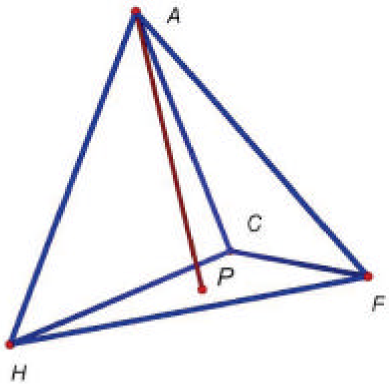
## Matemática - Gabarito Grupos I e J

**3ª QUESTÃO:** (2,0 pontos)  Avaliador  Revisor

Calcule o volume de um tetraedro regular cujos vértices foram escolhidos dentre os vértices de um cubo de 1 m³ de volume.

Cálculos e respostas:




Qualquer aresta do tetraedro construído é uma diagonal de uma face do cubo. Assim, o volume do tetraedro ACFH é igual ao volume do cubo (1m³) menos a soma dos volumes dos tetraedros AEFH, FABC, CFGH e HACD. Como o volume de um tetraedro é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base pela sua altura, segue-se que o volume de cada um desses tetraedros é $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$m³. Assim, o volume do tetraedro regular ACFH é igual a $1 - 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\text{m}^3$.

**Outra solução:**

A medida da diagonal de uma face do cubo é igual a $\sqrt{2}$ m. Dessa maneira, a área do triângulo eqüilátero CFH é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m².

Sendo P o centro do triângulo equilátero CFH, sabe-se que PH = $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo APH, conclui-se que a altura do tetraedro é dada por

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{m.}$$

Logo, seu volume é $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\text{m}^3$.

**MATEMÁTICA - Gabarito Grupos I e J**

**4ª QUESTÃO:** (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Ao entrar na sala de aula, um professor de matemática encontrou as seguintes afirmações escritas no quadro:

**I)** Se $x$ é um número real, então $\sqrt{x^2} = x$.

**II)** Se $a$ e $b$ são números reais, $a \neq 0$ e $a\,x > b$, então $x > \frac{b}{a}$.

**III)** $\sum_{n=0}^{21} 3^n = (1+3+3^2+\cdots+3^{21}) = \frac{3^{22}-1}{2}$.

**IV)** Se $p$ e $q$ são números reais tais que $\log p^2 = \log q^2$, então $p = q$.

Diga se cada uma das afirmações acima é verdadeira ou falsa. **Justifique as suas respostas.**

Cálculos e respostas:

I) Falsa ! Por exemplo, para $x = -2$, $\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$

II) Falsa! Por exemplo, as escolhas $a = -1$, $x = -3$ e $b = 2$ ilustram a falsidade da afirmação.

III) Verdadeira! $\sum_{n=0}^{21} 3^n = 1+3+3^2+\cdots+3^{21}$ é a soma dos 22 primeiros termos de uma PG de razão 3 e primeiro termo igual a 1. Tal soma é igual a : $1 \cdot \frac{3^{22}-1}{3-1} = \frac{3^{22}-1}{2}$.

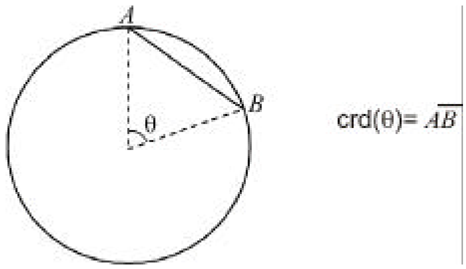
IV) Falsa! Por exemplo, $-1 \neq 1$ e $\log[(-1)^2] = \log[(1)^2]$.

**MATEMÁTICA - Gabarito Grupos I e J**

**5ª QUESTÃO:** (2,0 pontos) Avaliador Revisor


**Ptolomeu** (gravura do século XVI)

A trigonometria desenvolveu-se como resultado de uma interação contínua e fecunda entre o modo de pensar matemático e a arte de observar o céu. O famoso texto Almagesto, do astrônomo Ptolomeu, é, com efeito, um marco dessa relação. Nele, há uma tabela da *função corda* que pode ser definida como segue:
Dado um círculo de raio unitário e um ângulo central $\theta$ ($0^o \leq \theta \leq 360^o$), definimos a *crd*($\theta$) (lê-se a *corda* de $\theta$) pela medida do segmento de reta que une as extremidades do arco $\overset{\frown}{AB}$ subtendido pelo ângulo $\theta$, conforme figura abaixo.




a) Determine $crd\left(60^o\right)$ e $crd\left(90^o\right)$.

b) Determine uma expressão para o comprimento do segmento de reta $AB$ em função do ângulo central $\theta$, $0^o < \theta < 180^o$.

Cálculos e respostas:

a) Seja $O$ o centro do círculo.

Se $\theta = 60^o$, o triângulo $AOB$ é eqüilátero e então $\overline{AB}$ é igual à medida do raio do círculo.

Portanto, $crd\left(60^o\right) = 1$.

Se $\theta = 90^o$, usando o Teorema de Pitágoras, tem-se: $(\overline{AB})^2 = 1^2 + 1^2$. Neste caso, $crd\left(90^o\right) = \sqrt{2}$.

b) Pela lei dos co-senos tem-se: $\left(\overline{AB}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta = 2 - 2\cos\theta$. Como $\overline{AB} > 0$,

$\overline{AB} = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$.